

Óptica Cuántica

Todo lo que llamamos real está hecho de cosas que no pueden considerarse reales.
Niels Bohr

Esto son notas personales sobre óptica cuántica centradas en tres aspectos particulares: La propia cuantificación de campo electromagnético, la interacción radiación materia, e interferencia cuántica. Creo que encajan en el curso de óptica, con lo que trabajándolos más quizás puedan pasar algún día a ser parte del curso. Cualquier comentario con el que mejorarlas será bienvenido. El causante de estos daños es Alfredo Luis entre Madrid y Zaragoza en las primaveras de 2016 y 2017.

Modos de ser ondas

Hemos visto que cualquier onda se puede descomponer como suma/integral de ondas armónicas planas, aunque la dependencia espacial podría ser otra, ondas esféricas por ejemplo:

$$E = \sum_j \alpha_j \vec{\epsilon}_j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)} = \sum_\ell \beta_\ell \vec{\epsilon}_\ell U_\ell(t, \vec{r})$$

donde α_j, β_ℓ son amplitudes complejas, y $\vec{\epsilon}_{j,\ell}$ representan la polarización. De forma más abstracta $U_\ell(t, \vec{r})$ puede ser cualquier conjunto completo de soluciones independientes de las ecuaciones de Maxwell, siendo las ondas armónicas y planas un ejemplo particular. Se les llama en general modos y son los grados de libertad de la luz.

Coherencia

Cualquier aproximación realista a la luz hemos de contemplar la posibilidad de que las amplitudes α_j sean aleatorias y en último término la especificación completa del estado de la luz deberá incluir, además del vector de ondas, frecuencia, etcétera, la distribución de probabilidad $P(\alpha_j)$ para las amplitudes α_j . Por sencillez en lo que sigue consideraremos un único modo o como máximo dos modos.

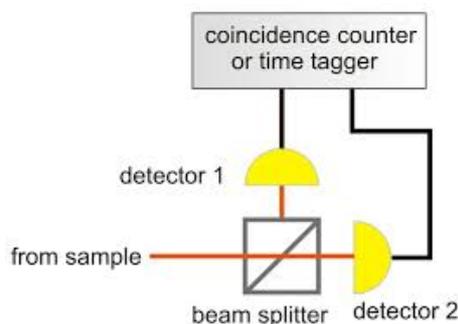
La óptica cuántica es una óptica estadística imposible

Estudiar las $P(\alpha)$ es hacer óptica estadística o coherencia óptica. La óptica cuántica emerge cuando se descubre que α es una variable aleatoria para la que no existe $P(\alpha)$. Efectivamente, los dioses juegan a los dados, pero unos dados incomprensibles. Lo podemos disfrazar de una forma u otra: complementariedad, dualidad onda-corpúsculo, o como quiera, pero todo remite a este mismo hecho, que hasta la fecha carece de explicación y ni siquiera se la espera.



Un experimento crucial

Un experimento para ilustrar esta idea. Un haz de luz de amplitud α se divide en dos en un divisor de haz, por ejemplo al 50%. Por el otro lado del divisor de haz no entra nada, digamos que una onda de amplitud nula $\beta = 0$. En las salidas del divisor de haz hay sendos detectores registrando las intensidades de salida, digamos I_1, I_2 . Disminuimos α mucho, mucho. La clave es que si α es suficientemente pequeño uno de los detectores **nunca** registra intensidad, es decir que **siempre** $I_1 I_2 = 0$. Podría entenderse que alguna vez un detector, o los dos, no detectarían nada. Pero en óptica clásica es imposible que **nunca** detecten los dos a la vez, porque sobre los dos incide la misma cantidad de luz.



Piénselo con cuidado y verá que no hay ninguna $P(\alpha)$ que explique ese resultado. Quizás piense intentarlo levantado la restricción $\beta = 0$, allá usted, porque tendrá complicado justificar por qué. Pero tampoco funciona.

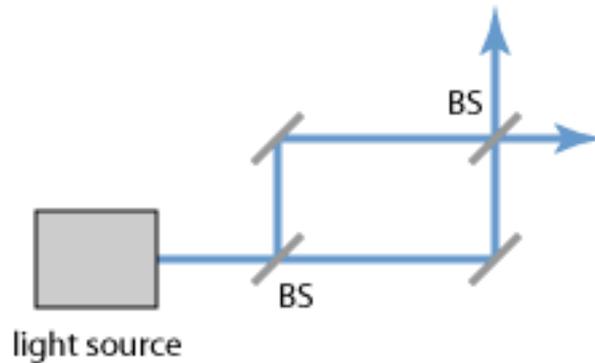
Imposible saberlo

Otro hecho que observará es que el detector que no detecta nada una vez es uno y otra vez el otro de forma aleatoria. ¿Por qué? Hasta la fecha parece que no hay forma humana ni divina de predecir cuál detectará y cuál no. Es decir que aunque lo sepamos todo del presente no podemos predecir el futuro. La física no parece que sea completa en este sentido. ¿Qué le parece que haya cosas que es imposible saber?

¿Y si la luz fuera un montón de fotones?

Puede pensar que la cosa se arregla si la luz fuera un conjunto de partículas indivisibles, fotones. Introducirá quizás la idea de que la intensidad es la cantidad de fotones. Al disminuir mucho mucho la intensidad sólo llegará un fotón cada vez, en cuyo caso toda la luz solo puede ir a un detector. Enhorabuena, aunque todavía tendrá dificultades para explicar porqué los fotones se reparten de forma aleatoria con unas probabilidades tan nítidas como las que ofrece la teoría ondulatoria.

Pero esto no arregla las cosas, es desvestir a un santo para vestir a otro, y no podrá explicar un experimento tan importante como la interferencia. Para ver esto complique el experimento crucial de antes añadiendo después del divisor de haz un juntador de haz para formar un interferómetro de Mach-Zehnder.



De nuevo hacemos el experimento fotón a fotón de forma que en todo instante sólo hay un fotón en el interferómetro, que por tanto (según ha concluido Vd. al analizar el experimento crucial) toda la luz irá por un camino o por otro, de forma aleatoria, pero sólo por uno. Eso quiere decir que siempre hay un único haz de luz, y por tanto ¿no puede haber interferencia, que siempre necesita dos haces para existir!! Vea el apéndice al final de estas notas.

Cuantificación

En los párrafos anteriores se ha pretendido ilustrar que no hay descripción estadística posible para la luz, ni como onda ni como partículas. Se supone que ahora viene la solución, pero lo que realmente viene es la no solución. Quiero decir que existe una forma de calcular que reproduce todos los resultados experimentales, pero que es dudoso que se pueda decir que explique lo que está pasando.

Visitamos brevemente la idea de cuantificación del campo electromagnético según un procedimiento estándar: la variable que se resiste ser una simple variable aleatoria se va a convertir en un operador/matriz en un espacio vectorial y los estados de luz pasa a ser vectores. Los podemos llamar A y $|\psi\rangle$. Típico espacio de Hilbert. ¿Intuitivo?.

Los momentos de la correspondiente variable aleatoria se calculan como

$$\langle A^n \rangle_q = \langle \psi | A^n | \psi \rangle ,$$

donde el subíndice indica que éste sería el análogo cuántico de los promedios "clásicos"

$$\langle A^n \rangle_c = \int dA P(A) A^n ,$$

siendo $P(A)$ la distribución de probabilidad de la variable A .

Una propiedad inquietante de los operadores/matrices es que en general no conmutan

$$AB \neq BA \quad \text{es decir} \quad [A, B] = AB - BA \neq 0 .$$

Y por lo tanto tenemos el primer resultado básico incompatible con la teoría clásica:

$$\langle AB \rangle_q \neq \langle BA \rangle_q ,$$

ya que clásicamente tendríamos

$$\langle AB \rangle_c = \int dAP(A,B)AB = \int dAP(A,B)BA = \langle BA \rangle_c .$$

Este es en definitiva otra forma de expresar nuestro punto de partida: observables que no admiten una distribución de probabilidad.

Operadores básicos

Por lo demás la versión más sencilla de la cuantificación parte de reconocer que las ondas armónicas tienen la oscilación perfecta de un oscilador armónico ideal. Más explícitamente volvamos a nuestra vieja amiga la onda armónica plana en representación real

$$E = (x + iy)e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow E = x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + y \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

donde x, y son las partes reales e imaginarias de la amplitud compleja $\alpha = x + iy$. Se denominan en general como cuadraturas. *Grosso modo*, podemos decir que las cuadraturas son esencialmente el valor de campo eléctrico en algún punto del espacio y en algún instante. Por ejemplo, cuando $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \pi m$ con m entero tenemos $E = \pm x$.

Bajo esta perspectiva de oscilador armónico tenemos que las cuadraturas x, y juegan papeles análogos a posición y momento lineal para el oscilador. Pues cuantifiquemos cada modo monocromático como un oscilador. Procedemos entonces convirtiendo x, y en operadores cuadratura X, Y . Equivalentemente podemos construir el operador amplitud compleja, a que es el operador asociado a la amplitud compleja α

$$\alpha = x + iy \rightarrow a = X + iY$$

La amplitud compleja no es un operador Hermítico, $a^\dagger = X - iY \neq a$, ya que es complejo en lugar de real. Se suele decir que los observables tienen que ser reales, pero no hay ninguna razón fundamental para esa exclusión y podemos admitir observables no reales como la amplitud compleja, o incluso observables no descritos por ninguna clase de operador.

Conmutadores básicos

Los conmutadores entre estos operadores básicos son:

$$[X, Y] = \frac{i}{2} \leftrightarrow [a, a^+] = 1 ,$$

donde la regla de conmutación para cuadraturas es una versión adimensional de la de posición y momento.

Como hemos dicho antes, la consecuencia más evidente de estos conmutadores es que para observables que no conmutan no se puede definir una distribución de probabilidad conjunta. Esencialmente ése era nuestro punto de partida. Fuera de esta idea no está claro qué puede significar los conmutadores. Nótese que en física clásica el significado de sus análogos, los paréntesis de Poisson, es que cada uno de ellos es el generador infinitesimal de traslaciones en el otro.

Sí que se puede derivar de ellos una relación de incertidumbre, como por ejemplo

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{4} ,$$

aunque, la verdad, no acaba de estar muy claro qué significa.

Otros operadores, operadoras y estados (no naciones)

Habiendo cometido la cuantificación estándar repasamos los observables y estados de luz más famosos.

Energía, o número de fotones: $H = \hbar\omega(X^2 + Y^2) = \frac{\hbar\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$.

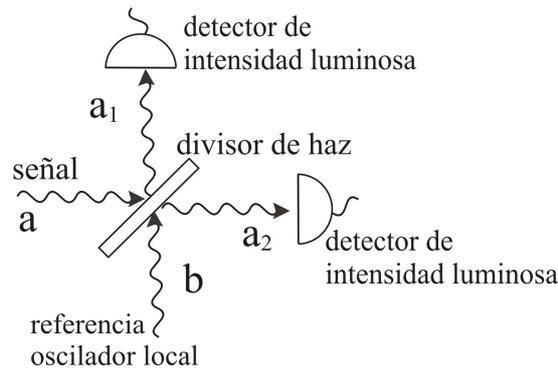
Este observable se puede medir experimentalmente midiendo la intensidad luminosa con los detectores usuales. Al término a^+a se le denomina operador número de fotones

Cuadraturas $X = \frac{1}{2}(a + a^+) , \quad Y = \frac{i}{2}(a^+ - a) ,$

que equivalen al campo eléctrico en un instante y lugar dados. En óptica es común argumentar que no es posible medir los campos eléctricos de ondas luminosas debido a su enorme frecuencia en el visible, de modo que ningún detector puede seguir la variación del campo eléctrico.

No obstante hay una técnica para obviar esta dificultad: interferencia. La idea consiste hacer interferir el campo a medir E_s con una onda de referencia E_o de la misma frecuencia por ejemplo. Se llama detector homodyno. La intensidad luminosa de la interferencia $|E_s + E_o|^2$ es, quedándonos sólo con el término interferencial, $I \propto E_s^*E_o + E_o^*E_s$. Si la onda de referencia es conocida, de la interferencia podemos inferir el valor de E_s . Por ejemplo si E_o es real vemos que el termino interferencial es esencialmente el valor de la cuadratura X de la onda

problema E_s . Análogamente variando la fase de E_o podemos explorar cualquier cuadratura.



Operador exponencial de la fase $E = \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a$,

Surge de una relación análoga clásica para obtener/definir la fase de la amplitud compleja α . Si $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ entonces la exponencial compleja de la fase es $e^{i\phi} = \alpha/|\alpha|$. Si intenta algo similar con operadores le sale algo así como

$$E = \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a = a \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a}}$$

donde E debería ser el operador que represente la exponencial de la fase $e^{i\phi}$. Pero enseguida se descubre que estas relaciones son muy, muy complicaditas, por que el operador amplitud compleja a y el operador $a^\dagger a$ no conmutan, lo que da lugar a patologías como que $|E| \neq 1$ o que $[E, E^\dagger] \neq 0$, resultados bastante absurdos por cierto. Tampoco se conoce forma sensata de medir E en la práctica.

Hay formas de esquivar estas dificultades, pero no deja nunca de sorprenderme que un observable tan básico en óptica como la fase sea *misión imposible* en óptica cuántica!!



Operadores de Stokes $S_x = a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1$ $S_y = i(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)$ $S_z = a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2$,

que son tres o cuatro observables que involucran dos modos del campo y que representan polarización o interferencia entre dos ondas. Se pueden medir muy fácilmente midiendo intensidades via interferencia o con polarizadores. Interesantemente satisfacen la misma regla de conmutación que el momento angular o espín $[S_x, S_y] = 2iS_z$.

Estados.- Los estados de luz son vectores en un espacio vectorial complejo, en principio de dimensión infinita. Los más famosos son los siguientes:

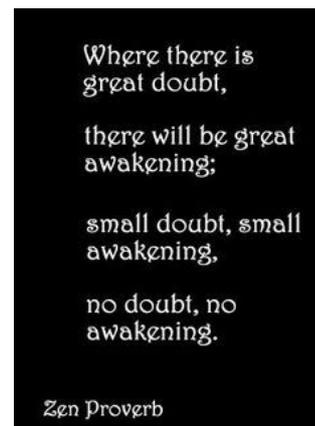
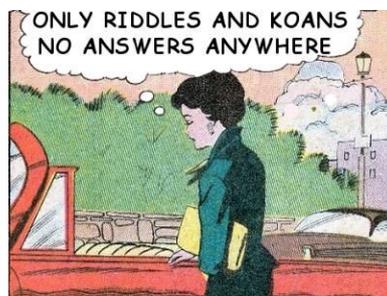
Estados número de fotones $|n\rangle$, que son autoestados de H y son el equivalente luminoso de los niveles de energía del oscilador armónico

$$a^+ a |n\rangle = n |n\rangle .$$

El número de fotones n puede tomar cualquier valor entero $n = 0, 1, \infty$. Actuando sobre los estados número con los operadores amplitud compleja tenemos que

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

por lo que también se conocen como operadores creación a^+ y destrucción a de fotones. No obstante no es tan sencillo, ya que *el estado $a|\psi\rangle$ puede tener un número medio de fotones mayor que el de $|\psi\rangle$, concretamente cuando es super-Poissonianos ! Increíble?? Quitas fotones pero quedan más fotones que antes. Dicho de otra forma: Cuanto más le quitas más tiene: hay koans más sencillos. Pero es cierto.*



Sobre fotones El fotón es un objeto muy popular de la óptica cuántica que no obstante ocupa quizás un puesto más relevante de lo que es natural. Uno de los objetivos de las notas anteriores era notar que se puede hacer óptica cuántica si hablar de fotones. Dicho de otra forma, los estados número de fotones no son más que una base del espacio de Hilbert como cualquier otra. Su interpretación naïf como partícula, o ente real es muuuuy problemática. *Por ejemplo: note que un estado de n fotones $|n\rangle$ no es simplemente n veces $|n=1\rangle$, $|n=2\rangle \neq |n=1\rangle|n=1\rangle$, etcétera;!! ¿Puede entender dónde está la diferencia? Si el concepto de fotón es complicado imagine esta particular asociación de n fotones, si es que esa idea tiene algún sentido, que quizás no!! Cuestionen que surgen, ¿la luz de un estado de n fotones de frecuencia ω , ¿oscila a frecuencia ω o a frecuencia $n\omega$? ¿Su longitud de onda es λ ó λ/n ? Bonitas preguntas.*

La mejor forma de resolver problemas es evitando que surjan. En nuestro caso evitando concluir que el fotón es una partícula localizada que vive en el espacio

ordinario, y que pasa o no por rendijas, o por brazos de interferómetros. Quizás más acertadamente podríamos decir que vive en el espacio de los campos eléctricos, o de los modos del campo electromagnético, para ser más precisos. Digamos que el fotón sería una unidad de excitación de un modo del campo eléctrico $U_\ell(t, \vec{r})$, no es una partícula localizada en ninguna parte.

Ni siquiera el cuanto de luz o fotón -un concepto introducido por el propio Einstein- podía entenderse adecuadamente en la teoría cuántica. En 1951 declaró: «Después de cincuenta años pensando a fondo sobre la cuestión, no estoy más cerca de responder a la pregunta: ¿Qué son los cuantos de luz?» Por supuesto, hoy cualquier mocosito cree saber la respuesta, pero se engaña».

Capturar la Luz. Una historia entrelazada de la luz y la mente
Arthur Zajonc

Incidentalmente, el efecto fotoeléctrico no es una evidencia del carácter corpuscular de la radiación, a pesar de la creencia común y del premio Nobel. Se puede explicar el efecto con una teoría clásica de la radiación, la clave está en la cuantificación de la materia y en la idea de resonancia, como se muestra en un par de ficheros en este mismo campus virtual. Por decirlo en términos sencillos, que podamos medir la fuerza del viento por el número de hojas de un árbol que caen no quiere decir que el viento tenga naturaleza corpuscular (el *cierción* en Aragón).

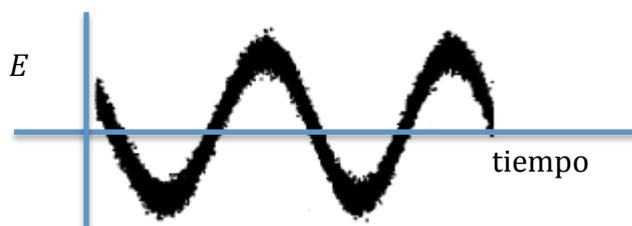
Estados coherentes de Glauber $|\alpha\rangle$ son autoestados de la amplitud compleja

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

y son estados de incertidumbre mínima en las cuadraturas con

$$\Delta X = \Delta Y = \frac{1}{2} .$$

Nótese que son estados que queda igual si le quitamos fotones. Pero ojo que $a^+|\alpha\rangle \neq \alpha^*|\alpha\rangle$, de hecho a^+ no tiene autovectores.



Campo eléctrico en función del tiempo para un estado coherente.
G. Breitenbach, S. Schiller y J. Mlynek, Nature **387**, 471 (1997)

Sobre la coherencia cuántica Gran parte de la relevancia de los estados coherentes se debe a la teoría de la coherencia cuántica de Glauber, que le valió el premio Nobel. *Según esa teoría estos estados tendrían la coherencia más alta posible. De nuevo, con todo respeto y a pesar del Nobel, creo que es un resultado muuuy engañoso, veámoslo.*

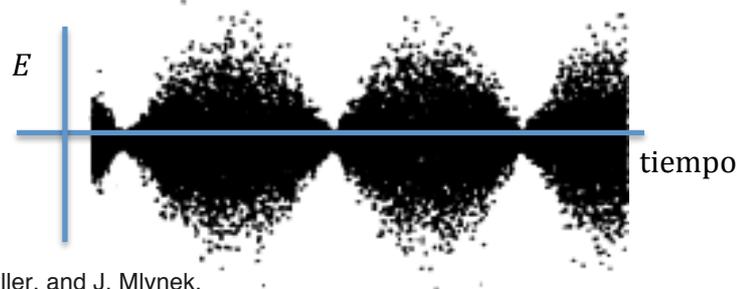
Propiamente hablando coherencia significa la relación de dependencia estadística entre campos eléctricos en dos puntos del espacio-tiempo. La idea intuitiva que todos tenemos es que mayor coherencia implica interferencia con mayor visibilidad o polarización mejor definida. Es natural entender que mejor interferencia y polarización permite realizar mejores medidas y por lo tanto podemos entender coherencia como un recurso necesario para una metrología cada vez más poderosa.

Pero hay que señalar que esta vinculación entre coherencia y resolución metrológica está basada en herramientas y criterios estadísticos muy elementales y pensados para una observación de la interferencia esencialmente a simple vista. Un resultado muy interesante que ilustran trabajos recientes es que la formulación estándar de la coherencia de un haz de luz no da cuenta de su poder resolutorio, de su capacidad para portar la información relativa a una señal o una magnitud que se quiera medir.

Así las cosas podría pensarse que la teoría cuántica de la coherencia está resuelta tras los trabajos de Glauber. No puedo estar de acuerdo si entendemos que son las aplicaciones metrológicas las que definen el verdadero significado de la coherencia, y de esas aplicaciones no da cuenta la teoría de Glauber de la coherencia. De hecho hay resultados en el sentido contrario, de que los estados coherentes de Glauber son los menos indicados para hacer medidas precisas, y son estados de baja coherencia Glauber los que permiten hacer las medidas interferométricas y polarimétricas más precisas.

Todo esto indica que, a pesar de lo que diga la academia sueca, hay un campo de investigación abierto para comprender la verdadera extensión de la coherencia como recurso en metrología y que debe hacerse en el sentido de identificar coherencia con resolución.

Estados comprimidos Son estados que tienen menores fluctuaciones que los coherentes en alguna cuadratura, a costa de tener más en otra como manda la relación de incertidumbre. En particular menores fluctuaciones que el vacío, que no deja de ser una propiedad muy curiosa. Por ello son ideales para realizar medidas mucho más precisas que las que se pueden hacer con estados coherentes, a pesar de que tienen menor coherencia de acuerdo con la teoría de Glauber!! Y es muy curioso que hasta el vacío se puede comprimir y medir la reducción de fluctuaciones.

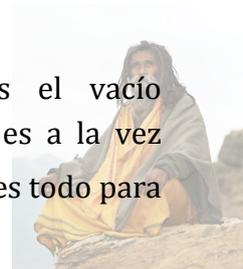


G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek, "Measurement of the quantum states of squeezed light", Nature, 387, 471 (1997)

Estados de fase Autoestados del operador exponencial de la fase $E|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$

$$|\xi\rangle = \left(1 - |\xi|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n |n\rangle .$$

Vacío, la luz de las tinieblas Un estado muy particular es el vacío $|n=0\rangle = |\alpha=0\rangle = |\xi=0\rangle$, donde el número de fotones es cero y que es a la vez número, coherente y fase, y también hay vacío comprimido. El vacío lo es todo para alegría de los gurús indios.

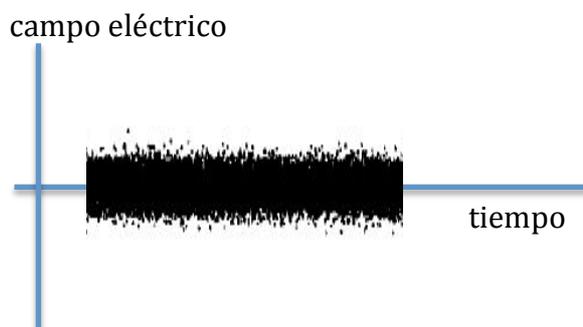


El vacío es el estado de mínima energía, no hay ningún fotón, ¡pero no equivale a la ausencia de luz! Aunque no hay fotones hay energía y el campo no es cero. *¡El vacío no es la nada! ¡Hay muchísima física en el vacío!*

Para empezar, aunque el valor medio de las cuadraturas sea nulo $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0$ sus fluctuaciones no lo son, $\Delta X = \Delta Y = 1/2$. Observe que aunque la condición $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0$ parezca muy extraña es de hecho la situación más común, y la verifica la luz emitida por todas las fuentes de luz, salvo el láser en algunos casos. La razón es la aleatoriedad en fase tantas veces comentada en este curso en especial en el apartado de coherencia.

Note que hay un estado de vacío por cada modo $U_\ell(t, \vec{r})$.

Gente muy curiosa se ha esforzado para ver la luz en las tinieblas, es decir, medir el campo eléctrico del estado de vacío. La figura siguiente muestra el resultado experimental de medir el campo eléctrico en función del tiempo para el vacío de unos 1000 nm de longitud de onda. Observe que no hay ninguna oscilación, aunque estemos en frecuencias del visible: así de chulo es el vacío, hasta se permite el lujo de no oscilar, aunque no es el único pero sí el más sutil.



G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek, "Measurement of the quantum states of squeezed light", Nature, 387, 471 (1997)

Por lo tanto el vacío da lugar a efectos. El más claro quizás que se trata más abajo en estas notas es la emisión espontánea, que es de hecho emisión estimulada por el vacío. Además el desplazamiento Lamb entre los niveles $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno, el efecto Casimir, como un par de ejemplo populares

Interacción entre la materia y la radiación

Presentación. El análisis hecho durante todo el curso (*modelo de Lorentz*) pretende ser física clásica, tanto para la luz como para la materia. Pero sabemos que la física clásica falla a escala atómica, que es precisamente donde se decide la interacción radiación-materia. Implícitamente esto se tiene en cuenta en el modelo de Lorentz al postular la existencia de un estado fundamental no trivial para el átomo, representado a veces como una especie de nube electrónica en torno al núcleo.

Vale la pena echar un breve vistazo a la versión cuántica de la interacción radiación-materia y relacionarla con lo que hemos hecho en ese curso. Lo haremos todo lo sencillo que sea posible.

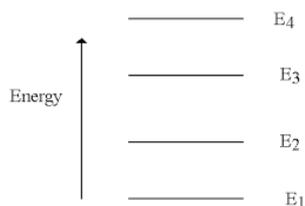
Hay dos modelos cuánticos:

El modelo semi-clásico en el que se cuantifica la materia pero no la luz.

Modelo cuántico en el que se cuantifican los dos: materia y luz.

Naturalmente, uno espera que al introducir la física cuántica el modelo se haga más preciso y que describa mejor la interacción radiación-materia. Ciertamente así es, pero un objetivo fundamental de estas notas es mostrar hasta qué punto el sencillo modelo clásico funciona mucho más allá de lo esperado.

Modelo semi-clásico. Hablemos primero sólo de la materia como si la luz no existiera. Y hablemos por sencillez de un único electrón en un átomo. Cuando se describe cuánticamente la materia, uno de los resultados principales es que un sistema como un electrón ligado dentro de un átomo no puede tener cualquier valor de la energía total. Típicamente esos valores posibles se representan con líneas horizontales en un eje vertical de energías.



El estado o nivel de menor energía se denomina fundamental, y el resto excitados. En un universo sin luz todos los niveles son estables, es decir, que un electrón puesto en un nivel excitado cualquiera permanecerá excitado por los siglos de los siglos (hasta que el *atleti* gane la *champions* y más allá). Cada uno de ellos se puede describir como una especie de nube electrónica de distinta forma, que en este contexto se llama función de ondas.

Casi toda la óptica de este curso se puede explicar invocando sólo dos de esos niveles energéticos, el fundamental y uno de los excitados. Esta simplificación se debe esencialmente a la idea de resonancia. Las correspondientes nubes electrónicas las podemos denotar como $\psi_{e,f}(\vec{r})$ aunque a veces para abreviar nos referiremos a esos niveles como $|\text{fundamental}\rangle$ y $|\text{excitado}\rangle$.

Una de las maravillas de la física cuántica es que el átomo puede estar en una superposición de niveles energéticos, algo que se suele escribir así:

$$c_f |\text{fundamental}\rangle + c_e |\text{excitado}\rangle \quad \text{o en funciones de onda } c_f \psi_f(\vec{r}) + c_e \psi_e(\vec{r}).$$

Los coeficientes $c_{e,f}$ indican la proporción de fundamental y excitado. Para el átomo aislado cada uno de los niveles cambia en el tiempo de forma trivial con una simple fase (como una onda armónica)

$$|\text{fundamental}\rangle \rightarrow e^{-iE_f t/\hbar} |\text{fundamental}\rangle \quad |\text{excitado}\rangle \rightarrow e^{-iE_e t/\hbar} |\text{excitado}\rangle$$

donde \hbar es la constante de Planck. La superposición cambia con el tiempo en la forma

$$c_f |\text{fundamental}\rangle + c_e |\text{excitado}\rangle \rightarrow c_f e^{-iE_f t/\hbar} |\text{fundamental}\rangle + c_e e^{-iE_e t/\hbar} |\text{excitado}\rangle$$

que aprovechando que las fases globales no importan es lo mismo que

$$c_f e^{-iE_f t/\hbar} |\text{fundamental}\rangle + c_e e^{-iE_e t/\hbar} |\text{excitado}\rangle \equiv c_f |\text{fundamental}\rangle + c_e e^{-i\omega_0 t} |\text{excitado}\rangle$$

donde para abreviar hemos definido $\omega_0 = \frac{E_e - E_f}{\hbar}$.

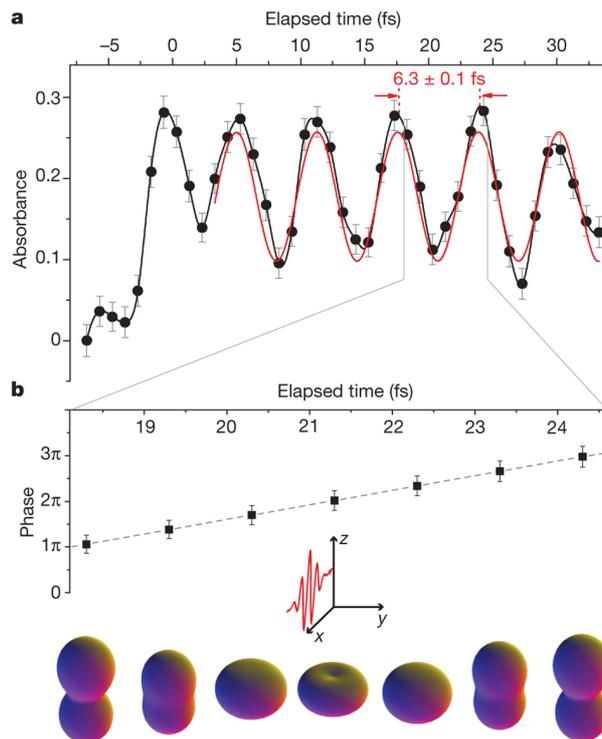
La conclusión fundamental para nosotros es que para un átomo aislado la superposición de fundamental y excitado cambia con el tiempo de forma armónica

con frecuencia $\omega_0 = \frac{E_e - E_f}{\hbar}$. Esta es la frecuencia natural o propia de ese átomo,

con la que oscila abandonado a sí mismo y que es la que postula el modelo de Lorentz. En este modelo semi-clásico la frecuencia de resonancia surge de forma natural de la estructura interna del átomo.

Al depender de la diferencia de energías, la frecuencia de resonancia depende de los niveles elegidos!!! Es decir que un mismo átomo puede tener muchas frecuencias de resonancia, esencialmente tantas como parejas de niveles.

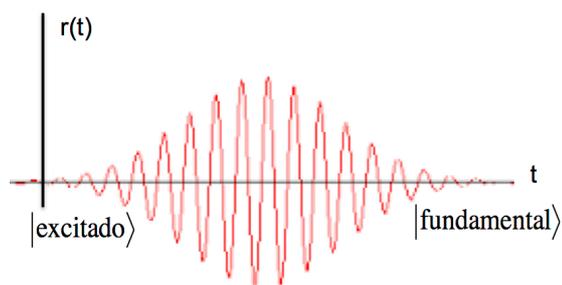
La oscilación atómica a frecuencia ω_0 ha sido observada en un experimento. Un primer pulso de luz crea la superposición de fundamental y excitado que después sondea un segundo pulso de attosegundos de duración distante fracciones de femtosegundo del primer pulso. En las gráficas puede verse la oscilación y la variación lineal con el tiempo de la fase de la oscilación $\omega_0 t$. Más abajo hay una representación artística del movimiento de las nubes electrónicas.



E Goulielmakis *et al.* *Nature* **466**, 739-743 (2010) doi:10.1038/nature09212

Enchufamos ahora la interacción con la luz. Sorprendentemente los niveles energéticos siguen siendo estacionarios aun cuando tengamos en cuenta lo que dice el electromagnetismo clásico. Un electrón en un nivel excitado seguirá por siempre excitado sin emitir luz. La razón fundamental es que las correspondientes distribuciones electrónicas tienen momento dipolar nulo. Los niveles excitados no se vuelven inestables por emisión de luz hasta cuantificar la luz. *Compárese con la situación clásica en la que el átomo es como un muelle. ¿Qué hace un muelle si lo estiramos y soltamos = átomo excitado? Oscilar a su frecuencia natural, y como es un movimiento acelerado radia ondas electromagnéticas.*

No obstante los niveles energéticos excitados son como un péndulo rígido, invertido y en equilibrio inestable en su punto más alto, una pequeña perturbación creará una superposición del tipo $c_f|\text{fundamental}\rangle + c_e|\text{excitado}\rangle$ con momento dipolar no nulo oscilante a frecuencia ω_0 y que por lo tanto emitirá luz mientras transita del nivel excitado al fundamental, donde el momento dipolar vuelve a hacerse nulo. Se ilustra esta idea en la siguiente figura para esa variación temporal del momento dipolar, y del campo radiado:



Cuando iluminamos el átomo con una haz de luz la dinámica del átomo viene descrita por ecuaciones que son casi idénticas a las del modelo de Lorentz pero con un factor nuevo de la forma $|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2$ que tiene en cuenta que el átomo está siempre en una superposición del tipo $c_f|\text{fundamental}\rangle + c_e|\text{excitado}\rangle$:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left(|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2\right)\vec{E}_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2\vec{r} - m\gamma\dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|c_e(t)|^2 - |c_f(t)|^2\right) \propto \vec{r} \cdot \vec{E} - \gamma|c_e(t)|^2$$

En estas ecuaciones $q\vec{r}(t)$ representa el valor medio del momento dipolar con $\vec{r}(t) \equiv \langle \vec{r}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \vec{r} | \psi(t) \rangle$ el momento dipolar medio de la correspondiente distribución electrónica.

Vamos a discutir tres situaciones interesantes a propósito del término nuevo:

i) El factor extra $|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2$ se convierte en la unidad si el átomo está próximo al nivel fundamental, es decir si la interacción con la luz perturba la dinámica del átomo pero la perturba poco. En ese caso $|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2 \approx 1$ y la primera ecuación es idéntica a la del modelo de Lorentz. Tenemos entonces lo mismo que hemos visto en el curso: absorción y dispersión. *Aquí está el éxito del modelo de Lorentz: funciona tan bien porque casi toda la óptica se explica con perturbaciones pequeñas del estado fundamental.*

Como tuvimos ocasión de comprobar en su momento la pequeñez de la perturbación es cierta en todos los casos salvo en resonancia donde encontrábamos ciertas inconsistencias en el modelo de Lorentz: por ejemplo la amplitud de la oscilación se hacía desproporcionadamente grande con respecto al tamaño típico de los átomos. Esas inconsistencias desaparecen de forma natural en el modelo semi-clásico donde desde el principio todo está acotado y es finito al ser el estado atómico siempre $c_f|\text{fundamental}\rangle + c_e|\text{excitado}\rangle$. Recordemos que otros niveles energéticos nunca serán accesibles por falta de resonancia.

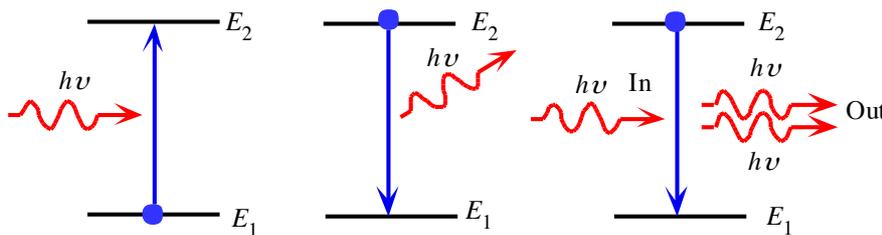
ii) Cuando $|c_f(t)|^2 = |c_e(t)|^2$ el campo eléctrico desaparece de la ecuación de evolución para $\vec{r}(t)$. Es decir, que el átomo deja de interactuar con la onda incidente y se hace perfectamente transparente!!!. Naturalmente la gracia está en mantener la condición $|c_f(t)|^2 = |c_e(t)|^2$ en el tiempo, lo cuál se puede hacer, pero lo contaremos otro día.

iii) Finalmente queda el caso $|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2 \approx -1$ en el que el átomo esté cerca del estado excitado. Esta situación se llama inversión de población porque el átomo está excitado, que es lo contrario a lo más normal, que es que esté en el estado fundamental.

En ese caso la ecuación para $\vec{r}(t)$ vuelve a ser la simple del modelo de Lorentz pero con un cambio de signo en la parte de interacción con el campo eléctrico. Si perseguimos ese cambio de signo a través de las ecuaciones podemos ver que conduce a que el medio pasa de ser absorbente a emitir luz. Se dice que el átomo emite luz estimulado por el campo eléctrico que fuerza su dinámica. La consecuencia es que la cantidad de luz crece a medida que una onda se propaga en un medio con esos átomos. Es la amplificación de luz por emisión estimulada que fundamenta el láser (que es un acrónimo que significa *amplificador de luz por emisión estimulada de radiación*). Naturalmente aquí el problema es mantener en el tiempo la condición $|c_f(t)|^2 - |c_e(t)|^2 \approx -1$, proceso que se llama *bombeo*.

Una conclusión interesante: Controlando el estado atómico podemos cambiar casi a voluntad el comportamiento óptico de la materia y hacer que un mismo medio pase de ser absorbente a transparente, o a amplificador, o al revés. Con ello podemos controlar lo que le pasa a un haz de luz que se propague entre esos átomos. Esta es una idea básica para el tratamiento de información y comunicaciones ópticas. Además, el método ideal para controlar el estado atómico...es también la luz!!!

Modelo cuántico. Naturalmente, se puede esperar una imagen más completa de la interacción entre la luz y la materia si también la luz se describe cuánticamente. Quizás la mayor novedad es que en el modelo cuántico ya no decimos simplemente que el átomo absorbe o emite luz, sino que diremos que absorbe o emite un determinado número de fotones, normalmente uno solo. Se siguen entonces los típicos diagramas como los de la figura



Si por ejemplo preparamos el átomo en un nivel excitado y hay n fotones:

$$|\text{excitado}\rangle |n \text{ fotones}\rangle$$

Con el tiempo el átomo va pasando al nivel fundamental emitiendo un fotón de frecuencia ω_0 aproximadamente que se lleva la diferencia de energía entre el nivel fundamental y el excitado $\hbar\omega_0 = E_e - E_f$.

$$c_e(t)e^{-iE_e t/\hbar}|\text{excitado}\rangle|n \text{ fotones}\rangle + c_f(t)e^{-iE_f t/\hbar}|\text{fundamental}\rangle|n+1 \text{ fotones}\rangle$$

Esto es otra forma de decir lo que ya hemos dicho antes sin necesidad de usar fotones: el dipolo atómico oscila a frecuencia ω_0 y esa es la frecuencia de la luz que emite. Ahora simplemente decimos que esa luz emitida forma toda ella un fotón, que se une a sus n compañeros que ya existían antes. Decimos que el átomo ha emitido un fotón al pasar del estado excitado al fundamental

$$|\text{excitado}\rangle|n\rangle \rightarrow |\text{fundamental}\rangle|n+1 \text{ fotones}\rangle$$

Se dice que la **emisión es espontánea** si inicialmente no hay fotones, $n = 0$, se dice la luz está en el estado de cero fotones o de vacío.

Se dice que la **emisión es estimulada** cuando hay luz presente, que se dice que induce o estimula la emisión de más luz.

Entrelazando. Pero me gustaría que prestáramos un momento de atención a la situación intermedia en la que existe una mezcla abracadabrante de luz y materia. Puesto de la forma más sencilla posible:

$$|\text{excitado}\rangle|n \text{ fotones}\rangle + |\text{fundamental}\rangle|n+1 \text{ fotones}\rangle$$

Se llama estado **entrelazado** (*entangled* en inglés) y contiene situaciones que no podemos ni imaginar, que muchos físicos se niegan a admitir, y que casi todos confiesan que ni entienden ni esperan que pueda ser explicada nunca. Buscad en google *Schroedinger's cat* o *many-worlds*. También es la razón de ser de una nueva rama de la física: la información cuántica.



“About your cat, Mr. Schrödinger—I have good news and bad news.”

La razón fundamental para la extrañeza de esta situación es que el fotón es indivisible, no puede emitirse por trozos: toda la onda aparece a la vez, o no aparece. Pero como nada puede ocurrir instantáneamente entonces tienen que coexistir la situación en la que el fotón no se ha emitido con la que si se ha emitido.

Ese fotón puede desencadenar una catástrofe (por ejemplo cambiar el canal del televisor a Telecinco) con lo que coexisten dos mundos, uno en el que somos felices y otro catastrófico, los dos son reales y están presentes a la vez, no es que ocurra uno u otro con cierta probabilidad. Si lo pensáis bien llegaréis a la conclusión a la que llegan los grandes sabios en la materia: es incompresible.

Emisión espontánea Paradójicamente, uno de los fenómenos que explica la cuantificación de la luz es la emisión espontánea. Ya hemos comentado que el modelo semi-clásico el átomo excitado en una habitación oscura nunca emitiría luz. Como eso no pasa, es decir que un átomo excitado retorna impenitentemente al fundamental, debe haber una explicación. Y la explicación que ofrece la teoría cuántica de la luz es realmente curiosa. Resulta que nunca deja de haber luz, nunca es posible la oscuridad completa, no en este universo. El estado de cero fotones no es un estado de oscuridad, todavía contiene luz, y es esta luz la que induce la emisión de más luz por parte de un átomo excitado. La emisión espontánea es el caso particular de emisión estimulada por el vacío.

Advertencia: No hay dos tipos de emisión de luz (espontánea y estimulada). Son el mismo proceso físico salvo que ocurriendo para dos condiciones iniciales distintas (ausencia o presencia de luz), y el resultado es en ambos casos el mismo $|n \text{ fotones}\rangle \rightarrow |n+1 \text{ fotones}\rangle$.

Emisión estimulada contra espontánea El vacío se extiende como un fantasma por todo el espectro electromagnético, si tenemos un haz de luz de cierta frecuencia, el resto del espectro está en el estado de vacío. Por ejemplo, en nuestro caso del átomo excitado en presencia de n fotones de frecuencia ω_0 el vacío en el resto de frecuencias puede inducir emisiones espontáneas, que deben competir con las estimuladas inducidas por los fotones existentes. Esto es una complicación técnica para construir un láser puesto que si queremos emitir luz de forma estimulada tenemos que favorecerla en comparación con la espontánea. Para eso debemos construir una especie de hucha de cerdito para fotones en la que los vamos almacenando la paga semanal hasta que son tantos que se pueden imponer sobre el estruendoso silencio del vacío y el cerdito estalla. La hucha se llama cavidad o interferómetro de Fabry-Perot. Pero esa es otra historia.

Apéndice: Interferencia clásica y cuántica. Notas para discusión en la práctica de Young en el Laboratorio de Física III

Unas pequeñas reflexiones y refracciones sobre la interferencia en óptica cuántica y clásica.



Descripción clásica de la interferencia en el interferómetro de Young:

Luz proveniente de una fuente pasa por las dos aberturas donde se difracta formando dos ondas $\vec{E}_{1,2}$ que se superponen en la pantalla de observación para dar un campo eléctrico $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Lo que observamos es la intensidad luminosa, que va con el cuadrado del campo eléctrico $I \propto \vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$. Los dos primeros términos son las intensidades de cada onda y el último es el término interferencial.

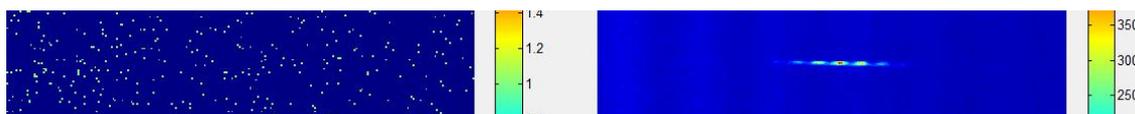
Este último término es el que constituye de hecho la interferencia dando máximos donde \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son paralelos (tiene el mismo signo) y mínimo donde \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son también paralelos pero llevan direcciones opuestas (tienen signos opuestos).

Si por alguna razón los vectores \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son perpendiculares $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$ y no hay interferencia.

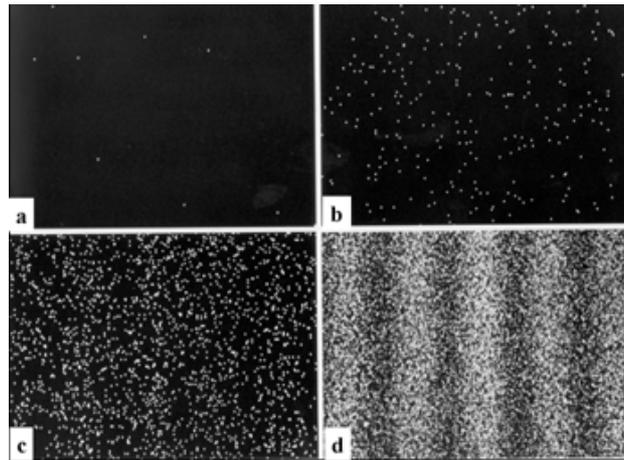
Si por alguna razón cualquiera de los dos ondas se anula $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$ y no hay interferencia.

Descripción cuántica de la interferencia en el interferómetro de Young:

En principio la descripción cuántica es la misma que la clásica salvo que sobre la pantalla no se observa una distribución continua de intensidad sino impactos discretos. En la imagen de la izquierda lo que se ve si iluminamos con poca luz y en la derecha lo que se ve si usamos mucha luz



Misma idea en la figura siguiente en cuatro fases.



La apariencia clásica de la interferencia se recupera en el límite de muchos impactos, causados por mucha luz, bien sea instantáneamente o acumulando registros obtenidos con poca luz. .

Una interpretación popular adscribe cada impacto a la presencia de un fotón en ese punto. De esta forma se puede entender la distribución de intensidad clásica como la probabilidad de detección de un fotón en cada punto. No existe mecanismo conocido por el que los fotones interactúen o se comuniquen entre sí. Por ello existe la tendencia a considerar los fotones como partículas independientes. En ese caso cada fotón es responsable de la aparición del interferograma completo y la interferencia realizada fotón a fotón acumulando los resultados daría exactamente lo mismo que usando todos los fotones a la vez. Se dice que cada fotón interfiere consigo mismo.

Las dificultades surgen si insistimos en imaginar que los fotones existen como entes reales incluso cuando no medimos la intensidad, el célebre problema de si la Luna está en su sitio cuando no la miramos. Si hacemos la interferencia con un solo fotón y pensamos que existe siempre como tal, indivisible, entonces ha de pasar por una rendija o por la otra, digamos que con 50% de probabilidad por cada una si $E_1 \approx E_2$. Si el fotón está en una sola de las rendijas quiere decir que siempre se anula una de las dos ondas y por lo tanto no puede haber interferencia. Se dice que el carácter corpuscular de la luz es incompatible con la interferencia.

¿Cómo se resuelve la paradoja? Muy fácil: no se resuelve. Es un hecho que la interferencia sólo se observa si no hay forma de saber por qué rendija ha pasado el fotón. Note la diferencia entre "lo que sabemos" y "lo que es". Para esconder que la paradoja no tiene solución se habla de complementariedad y se dice que interferencia y corpúsculo no son observables a la vez, si sabemos por qué rendija ha pasado no hay interferencia y sólo hay interferencia si no podemos saber por qué rendija pasó. Es la dualidad onda-corpúsculo. Es decir, cuando no la miramos no hay Luna.

Podemos intentar burlar la paradoja, observando de forma sutil el paso de los fotones por las rendijas. Por ejemplo poniendo polarizadores ortogonales sobre las aberturas para que sepamos por qué rendija ha pasado el fotón simplemente observando su polarización. Pero entonces $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$ y el término interferencial se anula.

Si lo que destruye la interferencia es nuestro conocimiento de corpúsculo podemos recuperar la interferencia si borramos la información sobre la rendija que lleva el estado de polarización. Para ello colocaremos después de las rendijas un nuevo polarizador. La luz que salga del polarizador habrá perdido su estado de polarización después de las rendijas, la información sobre la rendija se pierde por lo que la interferencia vuelve a ser posible. Clásicamente con el polarizador conseguimos que las dos ondas dejen de ser perpendiculares y la interferencia se recupera.

Una alternativa.

La mejor forma de resolver problemas es evitando que surjan. Cuando iluminamos las dos rendijas del interferómetro el fotón es una excitación del campo completo, \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , allí donde esté definido, no es una partícula localizada. Cuando colocamos detectores, estamos cambiando la forma del campo completo, descomponiendo la onda inicial en otras componentes. Es otro montaje distinto del original y no es sorprendente obtener respuestas distintas si cambiamos el montaje. ***Digamos que el carácter corpuscular dota de aleatoriedad a operaciones perfectamente naturales entre ondas.***

